4.1

lundi 29 avril 2024 17:11

Rappelons :

$$\mathrm{WCart} : \mathrm{Ring}_p \longrightarrow \mathcal{S}^{\leq 1}$$

$$R \longmapsto \left\{ I \xrightarrow{\alpha} W(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} I \to W(R) \twoheadrightarrow R \text{ est nilpotent} \\ I \to W(R) \xrightarrow{\delta} R \text{ généré l'unité} \end{array} \right\}$$

est un champs fpqc.

Soit (A, I) un prism, $\exists!$

$$\rho_A : \mathrm{Spf}(A) \longrightarrow \mathrm{WCart}$$

← p, I adique

déterminé par $\forall\ \mathrm{Spec}\, R \to \mathrm{Spf}\, A$

$\exists !\ A \to W(R) \to R$

après, observer que $I \otimes_A W(R) \to W(R)$ est un diviseur CW.

---

§ II Prismatisation absolue

p^∞-tor $= p^n$-tor pour qq n

Def $X :=$ bdd p-adic formal sch, sa prismatisation absolue est défini comme

$$WCart_X : Ring_p \longrightarrow \mathcal{S}^{\le 1}$$

$$R \longmapsto \{ I \to W(R),\ \eta : Spec(\overline{W(R)}) \longrightarrow X \}$$

Sch dérivé

Rk. ① Pour $R \in Ring_p$, $\ker(W_n(R) \to W_{n-1}(R))$ est nilpotent, de plus pour tous $I \xrightarrow{\alpha} W(R) \in WCart(R)$

$\pi_0(\overline{W(R)}) \in Ring_p$,

c'est à dire $Spec\ \overline{W(R)} = Spf(\overline{W(R)})$

② Pour tout $R \xrightarrow{ét} S \in Ring_p$,

$W(R) \to W(S)$ est aussi étale par thy de déf.

Alors $WCart_X$ est un champs étale.

③ $WCart_X$ admet un Frobenius : pour chaque pt

$pt = (I \xrightarrow{\alpha} W(R),\ \eta : Spec\ \overline{W(R)} \longrightarrow X) \in WCart_X(R)$

$F(pt) = (F^*I \xrightarrow{F^*\alpha} W(R),\ F(\eta) : Spec\ \overline{W(R)}' \longrightarrow X)$

$$\overline{W(R)}' \xleftarrow{F} \overline{W(R)}$$

④ Étant donné un obj

$(Spf A \leftarrow Spf A/I \to X) \in (X)_{\Delta}$

$\rho_A : Spf A \longrightarrow WCart_X$

ρ_A est Frob-equi

Ex. ① $WCart_{Spf(\mathbb{Z}_p)} \simeq WCart$

② $WCart_{X\times Y} \simeq WCart_X \times_{WCart} WCart_Y$ si $X\times Y = X\times^h Y$

③ R anneau de perfectoïd, (A,I) l'unique prism dont $A/I \simeq R$

Alors $\rho_A : Spf(A) \xrightarrow{\simeq} WCart_X$

Def (A,I) un prism borné, $X/\bar{A}$ un p-adic schéma formelle, la prismatisation relative $WCart_{X/A}$

$$\begin{tikzcd}
WCart_{X/A} \arrow[r] \arrow[d] & WCart_X \arrow[d] \\
Spf(A) \arrow[r] & WCart_{\bar{A}}
\end{tikzcd}$$

Rk. Si (A,I) est parfait, $\simeq$

Construction

$\forall\ (Spf(B) \leftarrow Spf(B/IB) \to X) \in (X/A)_{\Delta}$

on a $\rho_{X,B} : Spf(B) \to WCart_{X/A}$ un morphisme f-equi

Donc on a
$$R\Gamma(WCart_{X/A}, \mathcal{O}_{WCart_{X/A}}) \to R\Gamma^{site}_{\Delta}(X/A)$$

Thm (A,I):= prisme borné, $X/\bar{A}$ est p-cpl l.c.i

c'est à dire $\forall\ Spf(R) \subset X$, $R = R_0/J$ dont $R_0/\bar{A}$ est cpl lisse, J est généré par une suite régul.

Alors $R\Gamma(\mathrm{WCart}_{X/A}, \mathcal{O}_{\mathrm{WCart}_{X/A}}) \xrightarrow{\simeq} R\Gamma_{\Delta}^{\mathrm{cole}}(X/A)$.

est une equivalence des $\mathbb{E}_\infty$-alg.

Construction : $X/_{\mathbb{Z}_p}$:= p-adique fsch

pour chaque prisme borné (A,I),

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{WCart}_{X_{\bar A}/A} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{WCart}_{X_{\bar A}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathrm{WCart}_X \arrow[d, "\mathrm{WCart}_f"] \\
\mathrm{Spf}\, A \arrow[r] & \mathrm{WCart}_A \arrow[r] & \mathrm{WCart}
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{H}_{\Delta}(X)(A,I) := R\Gamma_{\Delta}(X_{\bar A}/A)$$

Fait : $\mathcal{H}_{\Delta}(X)$ détermine un faisceaux q.c. des complexes sur WCart

De l'autre coté, on a

$$R\mathrm{WCart}_{f*}\mathcal{O}_{\mathrm{WCart}_X} \in \mathcal{D}(\mathrm{WCart})$$

Théorème $X :=$ qcqs + p-quasisyntomic $/\bar A$

Alors $R\mathrm{WCart}_{f*}\mathcal{O}_{\mathrm{WCart}_X} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_{\Delta}(X)$ naturellement

$A \to B \in \mathrm{Ring}_p$, bornés

est q syn ssi :

a) B est p-cpl plat dessus A

b) $\mathbb{L}_{B/A} \in [0,1]$ p-cpl

Prop X comme dessus, alors on a

$$\mathcal{QC}(\mathrm{WCart}_X) \simeq \lim_{\substack{(A,I)\in X_{\Delta} \\ \text{borné}}} \hat{\mathcal{D}}(A) \leftarrow \text{crystal prismatique}$$

---

§2 Cplx sur WCart

C'est quoi $QC(WCart)$?

$$QC(WCart) = \lim_{\substack{\leftarrow \\ (A,I) \\ \text{borné}}} \hat{\mathcal{D}}(A)$$

Construction

① $A^0 := \mathbb{Z}\{a_0, a_1^{\pm 1}, a_2, \dots\}^{\wedge}_{(p, a_0)}$ $\mathcal{O}_{WCart_0}$

Noter que $F : W(R) \longrightarrow W(R)$ A est p-torsion libre

preserve $WCart_0(R) \subset W(R)$

alors $F : WCart_0 \to WCart_0$ induit une δ-str

$I^0 := (a_0)$, (A^0, I^0) est un prisme

$\rho_{A_0} : \operatorname{Spf} A^0 \longrightarrow WCart$

② $(A^n, I^n) := (A^0, I^0)^{\sqcup(n+1)}$ A_0 est multi transversal

alors on a un prisme cosimplicial $(A^\bullet, I^\bullet)$

Lemme $\rho_{A^\bullet} : \operatorname{Spf}(A^\bullet) \longrightarrow WCart$ induit une équi des ∞-cat

$$\mathcal{D}(WCart) \longrightarrow \operatorname{Tot}\left(\hat{\mathcal{D}}(A^\bullet)\right)$$

Application : Filtrations sur $H_{\Delta}(X)$

Def $WCart^{HT} \hookrightarrow WCart$ sous foncteur

qui associe à $R \in Ring_p$

$\alpha : I \to W(R)$ dont $I \to W(R) \to R$ disparaît

$WCart^{HT}$ est connu comme champs/diviseur de Hodge-Tate

(A,I) := prisme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spf}(A/I) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & \mathrm{WCart}^{HT} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & B\mathbb{G}_m \arrow[d] \\
\mathrm{Spf}(A) \arrow[r] & \mathrm{WCart} \arrow[r] & {[\mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m]}
\end{tikzcd}$$

Construction $V : F_* W \longrightarrow W$ est W-linéaire

De plus, $\forall R \in \mathrm{Ring}_p$ $V(1)$ détermine un diviseur CW et $V(1)$ est annulé par $W(R) \twoheadrightarrow R$

$$\eta : \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{WCart}^{HT}$$

Obs $\mathrm{Aut}(\eta)(R) = \{ u \in W(R)^\times \mid \underset{V(F(u))}{\overset{\shortparallel}{u \cdot V(1)}} = V(1) \}$

$= W^\times[F](R)$ ← invariant de F

Thm ① $\eta : \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p) \to \mathrm{WCart}^{HT}$ se prolonge en une éq des champs

$$\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p) \times \overset{\overset{W^\times[F]}{\shortparallel}}{B\mathbb{G}_m^{\#}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{WCart}^{HT}$$

② (A,I) := prisme borné, $X/\bar{A}$ p-fsch

$\pi^{HT} : \mathrm{WCart}^{HT}_{X/A} \longrightarrow X$ est un gerbe de $T_{X/\bar{A}}\{1\}^{\#}$

$\forall X$ affine, π^{HT} scinde.

Sen operator

$\mathbb{Z}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \to R$, $[\varepsilon] \in W(R)$ est annulé par

phantome

$(\varepsilon, \frac{\varepsilon^2}{2}, 0, \dots)$

$(1+[\varepsilon])V(u) = V(F(1+[\varepsilon])u) = V(u)$

c'est à dire $\pi : \mathrm{WCart}^{HT} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon]/\varepsilon^2) \to \mathrm{WCart}^{HT}$

$\circlearrowright$ $1+[\varepsilon]$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1+[\varepsilon]"'] \arrow[rd, phantom, "\circlearrowleft"] & W(R) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ I \arrow[r, "\alpha"'] & W(R) \end{tikzcd}$$

est un automorphisme.

$\Rightarrow \forall \mathcal{E} \in QC(\mathrm{WCart}^{HT})$

$u : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{Z}[\varepsilon]/\varepsilon^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{E}$

$u = \mathrm{id}_{\mathcal{E}} + \Theta_{\underset{\mathcal{E}}{\mathcal{E}}} \cdot \varepsilon$

Sen operator

Exemple. $\mathcal{I} : \mathcal{O}\{1\} \in QC(\mathrm{WCart})$

alors

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}|_{\mathrm{WCart}^{HT}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}+\mathrm{id}\varepsilon = (1+[\varepsilon])"'] & \mathcal{O} \arrow[d, "\mathrm{id}+0\varepsilon"] \\ \mathcal{I}|_{\mathrm{WCart}^{HT}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\varepsilon] \arrow[r] & \mathcal{O}[\varepsilon] \end{tikzcd}$$

$1+[\varepsilon] \longmapsto 1+\varepsilon$

$W(R) \longrightarrow R$

Alors $\mathcal{O}\{n\} \xrightarrow{\Theta \,=\, n\times} \mathcal{O}\{n\}$

Thm $\eta : \mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathrm{WCart}^{HT}$ induit

$$QC(\mathrm{WCart}^{HT}) \xhookrightarrow{\eta^*} \mathcal{D}(\mathbb{Z}[\Theta])$$

un foncteur pleinement fidèle.

L'image essentiel : $M \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}[\Theta])$

dont : ① M est p-cpl

② $\Theta^p - \Theta \circlearrowright H^*(\mathbb{F}_p \otimes M)$

localement nilpotent.